

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
ПО МАТЕМАТИКЕ.

2017—2018 уч. г. ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП.

7 КЛАСС

**Задания, ответы и критерии оценивания**

**1.** (7 баллов) Приведите пример двух обыкновенных дробей, разность которых в три раза больше их произведения. Приведите вычисления, обосновывающие это свойство.

**Ответ.** Например,  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{5}$ .

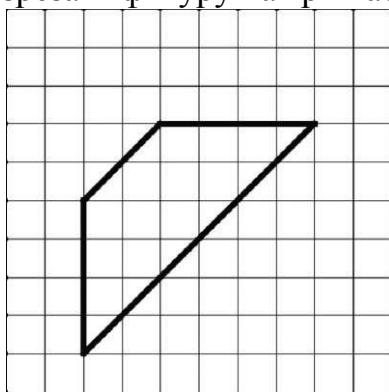
**Решение.**

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5-2}{10} = \frac{3}{10}, \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

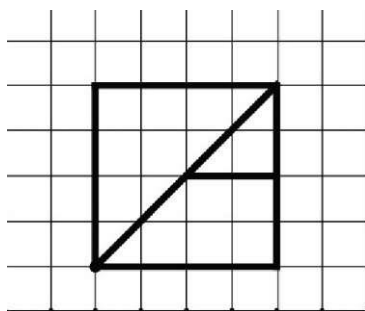
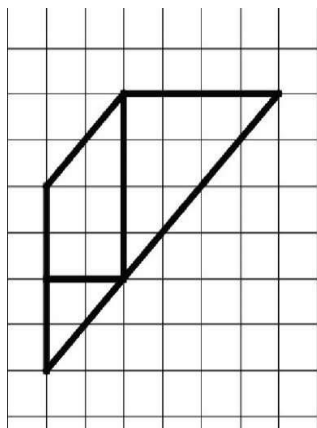
Подходят любые дроби вида  $\frac{1}{n}$  и  $\frac{1}{n+3}$ , есть и другие решения.

**Критерии проверки.**

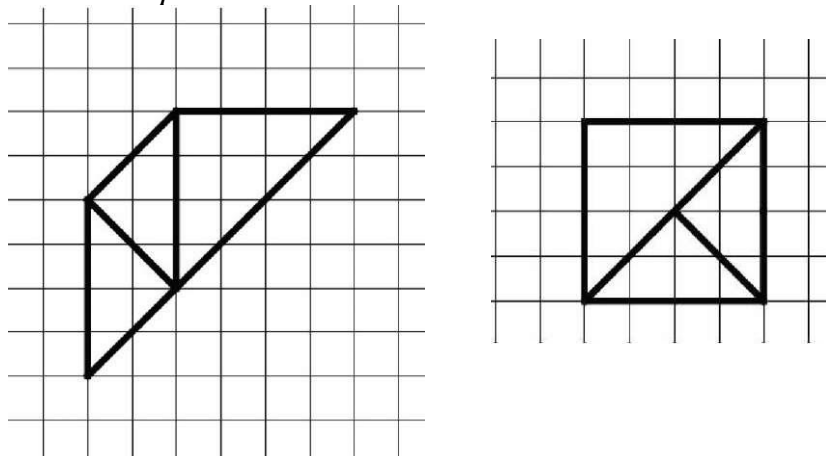
- Любое полное верное решение — 7 баллов.
  - Приведён верный ответ без обоснования — 3 балла.
- 2.** (7 баллов) Покажите, как разрезать фигуру на три части и сложить из них квадрат.



**Решение.**  
*Первый способ.*



*Второй способ.*



*Возможны и другие решения.*

**Критерии проверки.**

- Любое верное решение (на рисунках показано, как разрезать трапецию и как складывать квадрат) — 7 баллов.
- Неполное решение (показано только, как разрезать трапецию или как сложить квадрат) — 3 балла.

**3.** (7 баллов) На доске написано число 49. За один ход разрешается либо удваивать число, либо стирать его последнюю цифру. Можно ли за несколько ходов получить число 50?

**Ответ.** Можно.

**Решение.** Число 50 можно получить, удвоив 25, а 25 можно получить, стерев последнюю цифру числа 256, которое является степенью двойки. Таким образом, необходимая цепочка преобразований может выглядеть так:

$$49 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow 256 \rightarrow 25 \rightarrow 50.$$

Существуют и другие решения.

**Критерии проверки.**

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Неполное решение (например, указано, что 50 можно получить из числа 256, но не указано, как получить 256) — 3 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

**4.** (7 баллов) Один из трёх друзей: Андрей, Борис или Владимир — самый сильный, другой — самый умный, третий — самый добрый. Однажды они сказали следующее:

Андрей: Владимир сильнее меня. Борис: Я умнее

Владимира. Владимир: Борис умнее меня.

Известно, что самый сильный и самый добрый сказали правду, самый умный соврал и среди них нет двух людей, равных по силе.

Верно ли, что среди трёх друзей тот, кто самый добрый, тот и самый слабый? Обоснуйте свой ответ.

**Ответ.** Да.

**Решение.** Обозначим: А — Андрей, Б — Борис, В — Владимир. Утверждения Б и В повторяют друг друга, а так как имеется только одно неверное утверждение среди трёх, Б и В сказали правду, А — ложь. Следовательно, А самый умный (по условию), А сильнее В (так как А соврал) и Б умнее В (так как Б и В сказали правду). Раз А сильнее В, то В не самый сильный. Получается, что самый сильный Б, средний по силе А, самый слабый — В. При этом В не самый умный и не самый сильный, значит, он самый добрый.

*Для наглядности можно занести имеющуюся информацию в таблицу. Будем обозначать «места» каждого качества: 1 – первое место (самый умный / сильный / добрый), 2 – среднее, 3 – последнее место.*

	умный	сильный	добрый
А	1	2	
Б		1	
В		3	1

Из таблицы видно, что В — самый добрый и самый слабый.

**Критерии проверки.**

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верно и обоснованно найдено, кто самый сильный, кто самый умный и кто самый добрый, а дальше продвижений нет — 5 баллов.
- Обоснованно получено, Андрей самый умный, верно распределены друзья по силе (все 3 места), но не получено или не соотнесено с тем, что Владимир самый добрый, — 5 баллов.
- Приведены рассуждения только для частного случая (например, рассмотрен только случай, что Андрей сказал неправду) без рассмотрения остальных частных случаев и без указания на их невозможность — 2 балла.
- Верный ответ с указанием, кто самый умный, кто самый сильный и кто самый добрый, с проведённой проверкой, что при такой расстановке все условия задачи выполнены, но без обоснований — 2 балла.
- В самом начале рассуждений допущена ошибка — 0 баллов.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

**5. (7 баллов)** Мама гуляет с коляской вокруг озера и полностью обходит озеро за 12 минут. Ваня по той же дорожке в ту же сторону ездит на самокате и встречает (обгоняет) маму каждые 12 минут. Через какие промежутки времени Ваня будет встречать маму, если он будет ездить с той же скоростью, но в обратном направлении?

**Ответ.** Через 4 минуты.

**Решение.** Так как мама полностью обходит озеро за 12 минут и встречает Ваню раз в 12 минут, за 12 минут Ваня проезжает вокруг озера ровно 2 раза, а мама — один. Значит, скорость Вани в 2 раза больше скорости мамы. Отсюда следует, что, когда Ваня ехал в том же направлении, что и мама, скорость их

сближения была равна скорости мамы. Если Ваня будет ехать в противоположном направлении, то скорость их сближения будет равна трём скоростям мамы, то есть будет в три раза больше. Значит, он будет встречать маму в три раза чаще, то есть через каждые 4 минуты.

Это рассуждение можно провести, введя обозначение для длины дорожки. Пусть  $l$  — длина дорожки вокруг озера (в метрах), тогда скорость мамы равна

—  $\frac{l}{12}$  (м/мин), а скорость Вани —  $\frac{l}{6}$  (м/мин). Скорость сближения в случае, если

мама и Ваня едут навстречу друг другу равна  $\frac{3l}{12} = \frac{l}{4}$  (м/мин). Следовательно,

с такой скоростью они преодолеют вместе  $l$  метров за 4 минуты, т. е. будут встречаться раз в 4 минуты.

### Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верно найдено, что скорость Вани в 2 раза больше скорости мамы, верно найдена сумма скоростей, но окончательный вывод сделан неверно — 2 балла.
- Верно и обоснованно найдено, что скорость Вани в 2 раза больше скорости мамы, но дальнейшие рассуждения либо не обоснованы, либо не доведены до конца — 1 балл.
- Решение, в котором приведены конкретные расстояния и скорости и получен верный ответ, — 1 балл.
- Только верный ответ — 0 баллов.

**Максимальный балл за все выполненные задания - 35.**